

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΑΦΟΡΙΚΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΙΩΑΝΝΙΝΩΝ
ΙΟΥΝΙΟΣ , 2014

Θέμα Α

Έστω καμπύλη $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με παράμετρο το μήκος τόξου s και καμπυλότητα $k(s) > 0$ για κάθε $s \in I$. Θεωρούμε τη καμπύλη $\bar{c}(s) = \vec{t}(s)$ όπου \vec{t} είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο της c .

- (α') Αποδείξτε ότι η \bar{c} είναι κανονική και υπολογίστε την καμπυλότητά της.
- (β') Αποδείξτε ότι η εικόνα της \bar{c} είναι τόξο κύκλου αν και μόνο αν η c είναι καμπύλη σταθερής κλίσης.

Θέμα Β

- (α') Δώσατε παράδειγμα καμπύλης με παράμετρο t και καμπυλότητα $k(t) < 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Δικαιολογήσατε πλήρως την απάντησή σας.
- (β') Έστω κανονική συνεκτική επιφάνεια S της οποίας η καμπυλότητα Gauss δε μηδενίζεται σε κανένα σημείο. Αποδείξτε ότι αν όλα τα εφαπτομένα επίπεδα της S απέχουν σταθερή απόσταση από σταθερό σημείο τότε η S είναι τμήμα σφαίρας.

Θέμα Γ

Έστω $c(s) = (\varphi(s), 0, \psi(s))$ καμπύλη με παράμετρο το μήκος τόξου $s \in I \subset \mathbb{R}$ και $\varphi(s) > 0$ για κάθε $s \in I$.

- (α') Αποδείξτε ότι η καμπυλότητα Gauss της κανονικής παραμετρικής επιφάνειας

$$X(s, \theta) = (\varphi(s) \cos \theta, \varphi(s) \sin \theta, \psi(s)) \quad , \quad (s, \theta) \in I \times (0, 2\pi)$$

είναι $k = -\frac{\ddot{\varphi}}{\varphi}$.

- (β') Βρείτε τη καμπύλη c έτσι ώστε η X να είναι τοπικά ισομετρική με επίπεδο. Σε αυτή τη περίπτωση περιγράψτε γεωμετρικά την εικόνα της X .

Θέμα Δ

Δίδεται η κανονική επιφάνεια S με εξίσωση $z = x^3 + y^3$. Να βρεθούν

(α') η απείκονιση Gauss.

(β') το εφαπτόμενο επίπεδο της S στο σημείο $(0, 0, 0)$.

(γ') η απεικόνιση Weingarten στο σημείο $(0, 0, 0)$.

(δ') οι κύριες καμπυλότητες της S στο σημείο $(0, 0, 0)$.